المحاضرة الاولى

الفصل الاول

المتسلسلات اللانهائيه Infinite Series

اذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة و $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ فان المتتابعة $\{s_n\}$ تُسمى متسلسلة لانهائية

وبدلاً من $\{s_n\}$ سنستعمل الرمز $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

اذا كان $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ فان المتسلسلة متقاربة والمقدار s يُسمى بمجموع المتسلسلة وفيما عدا ذلك فان المتسلسلة متباعدة .

مثال (١) جد مجموع المتسلسلة $\quad 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n} \qquad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad 3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

الحل:

$$1. \quad s_1 = \frac{2}{5}$$

$$s_2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2}$$

$$\vdots$$

$$s_n = \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \cdots + \frac{2}{5^{n-1}} + \frac{2}{5^n} \qquad \cdots (1)$$

بضرب المعادلة الاخيرة بـ $\frac{1}{5}$ نحصل على

$$\frac{1}{5} s_n = \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \cdots + \frac{2}{5^{n-1}} + \frac{2}{5^n} + \frac{2}{5^{n+1}} \qquad \cdots (2)$$

بطرح معادلة (2) من معادلة (1) نحصل على

$$s_n - \frac{1}{5} s_n = \frac{2}{5} - \frac{2}{5^{n+1}}$$

$$s_n\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{2}{5^n}\right) \quad \to \quad \frac{4}{5} s_n = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{2}{5^n}\right)$$

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{5^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{5^n}\right) = \frac{1}{2}$$

2. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \quad ; n = 0 \rightarrow A = 1 \ and \ n = -1 \rightarrow B = -1$

$$\therefore \ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$\therefore \ s_k = 1 - \frac{1}{k+1} \ \rightarrow \ \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$$

وعليه فان المتسلسلة متقاربة ومجموعها 1

3. $s_1 = -1$

$s_2 = -1 + 1 = 0$

$s_3 = -1 + 1 - 1 = -1$

مبرهنة : اذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فان المتسلسلة متباعدة حيث a_n الحد النوني من المتسلسلة

مثال (٢) بيّن ايُّ المتسلسلات التالية متقاربة وايّ منها متباعدة ؟

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n}$

الحل :

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$ المتسلسلة متباعدة لان

$2. \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ متقاربة لان

$3. \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0$ متباعدة

$4. \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 0$ متقاربة

$5. \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n = \pm\infty \neq 0$ متباعدة

$6. \lim\limits_{n\to\infty} \cos n\pi = \pm 1 \neq 0$ متباعدة

$7. \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$ متباعدة

$8. \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n} = 0$ متقاربة

المحاضرة الثانية

ملاحظة :

١- المتسلسلة التوافقية $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة بالرغم من ان $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

٢- المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متقاربة لكل $p > 1$ ومتباعدة لكل $p \leq 1$.

فالمتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ متقاربة لان $p = 3 > 1$

والمتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4}}$ متباعدة لان $p = \frac{1}{4} < 1$

المتسلسلة الهندسية :

المتسلسلة التي بالصيغة $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$ تُسمى بالمتسلسلة الهندسية

ان مجموع المتسلسلة الهندسية هو

$$\boxed{s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$$

ملاحظة :

1. $If \quad |r| < 1 \qquad then \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$
2. $If \quad |r| \geq 1 \qquad then \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$

ان مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n}$ حيث $\left(r = \frac{1}{5} < 1\right)$ هو

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r} = \frac{2/5}{1-\frac{1}{5}} = \frac{2/5}{4/5} = \frac{1}{2}$$

تمارين

بيّن ايُّ المتسلسلات التالية متقاربة وايّ منها متباعدة ؟

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+2)(n+4)}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

المحاضرة الثالثة

Maclaurin Series:

(generated by f at $x=0$)

$$P(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

If we want to center the series (and it's graph) at som point other than zero, we get the Taylor Series:

Taylor Series:

(generated by f at $x=a$)

$$P(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

example: $y = \cos x$

$$f(x) = \cos x \quad f(0) = 1 \qquad f'''(x) = \sin x \quad f'''(0) = 0$$

$$f'(x) = -\sin x \quad f'(0) = 0 \qquad f^{(4)}(x) = \cos x \quad f^{(4)}(0) = 1$$

$$f''(x) = -\cos x \quad f''(0) = -1$$

$$P(x) = 1 + 0x - \frac{1x^2}{2!} + \frac{0x^3}{3!} + \frac{1x^4}{4!} + \frac{0x^5}{5!} - \frac{1x^6}{6!} + \cdots$$

$$\boxed{P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \cdots}$$

example: $y = \cos(2x)$

Rather than start from scratch, we can use the function that we already know:

$$P(x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^8}{8!} - \frac{(2x)^{10}}{10!} \cdots$$

$\sin(x)$

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$\sin(x)$	0
$\cos(x)$	1
$-\sin(x)$	0
$-\cos(x)$	-1
$\sin(x)$	0

$$\sin(x) = 0 + 1x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

Both sides are odd functions.

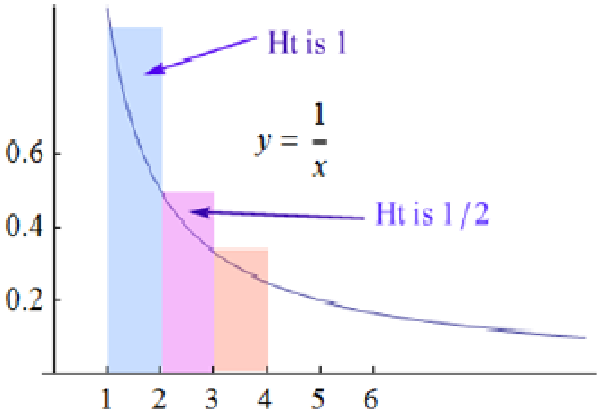
$\text{Sin}(0) = 0$ for both sides.

<u>المحاضرة الرابعة</u>

Convergence and Divergence of Series

The Key Question- does the series converge?

Example: Show that the series $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ diverges.



The sum of the areas of all these rectangles is

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

The area under the curve $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$ is smaller than the sum of the areas of the rectangles.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = ln\, x\Big]_1^{\infty} = ln\infty - ln\, 1 = \infty\,.$$

The area under the curve *y = 1/x* is less than the sum of areas of rectangles

On the other hand, the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converges because the integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ is finite.

The integral Test

Let $\{a_n\}$ be a sequence of positive numbers. Let $a_n = f(n)$ where $f(x)$ is a continuous, positive, and decreasing function for all $x \geq N$ where N is a positive integer.

Then the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and the integral $\int_N^{\infty} f(x) dx$ both converge or both diverge.

Since $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$, the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ must diverge.
This illustrates that we can use an integral to test if a series converges.

Example:

Use Integral Test to determine whether or not $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3}$ converges.

Note that if n is raised to a high enough power, the series will converge.

To see if $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3}$ converges, determine whether or not $\int_1^{\infty} \frac{4}{x^3}dx$ converges.

$$\int_1^{\infty} 4x^{-3}dx = \frac{4x^{-2}}{-2} = \frac{2}{x^2}\Big]_{\infty}^{1} =$$

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{\infty} = 2 - 0 = 2\,.$$

Since the integral converges, the sum converges.

المحاضرة الخامسة

The P-Series

A p-Series is a series of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

This series converges if $p > 1$ and diverges if $p \leq 1$.

Examples

The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverges because $p = 1/2 \leq 1$.

The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converges because $p = \frac{3}{2} > 1$.
